**Лекція**

***Тема :* Застосування похідної.**

***Мета:*** познайомити з правилами знаходження екстремумів функції застосовуючи властивості похідної, формування знань про алгоритм для знаходження екстремумів функції .

**План лекції.**

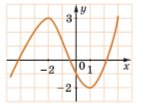
1. **Екстремуми функції.**
2. **Необхідна умова екстремуму функції.**
3. **Достатня умова екстремуму функції.**
4. **Задачі на пошук точок екстремуму та екстремумів функцій.**
5. **Екстремуми функції.**

Для дослідження функції та побудови її графіка важливо знати ***точки екстремуму*** та ***екстремуми функції.*** При дослідженні поведінки функ­ції в деякій точці зручно користува­тися поняттям околу.

* **Околом точки називають будь-який проміжок, що містить цю точку.**

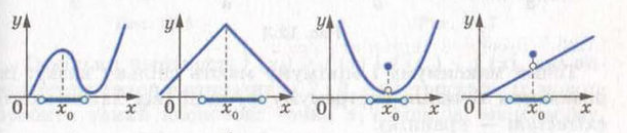
Наприклад, околом точки 2 може бути кожен з проміжків **(1,9; 2,1)**, або **(1; 2,5)**; околом точки -3 – проміжок **(-3,8; -2,9)** або **(-3,01; -2,99)**.

Розглянемо графік функції ***у* = *f(x)*,** зоб­ражений на рис. 1.



***Рис. 1.***

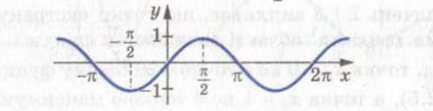
Як видно із рисунка, існує такий окіл точки -2*,* що для всіх точок із цього околу функція *у* = *f(x)* набуває найбільшого значення саме в точці -2. Таку точку називають ***точкою максимуму функції***, а значення функції в ції точці – ***максимумом функції.***



***Рис. 2.***

На рисунку 2 зображено графіки чотирьох функцй. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки такий, що для всіх з цього околу виконується нерівність ***f() f(х).***

Наприклад, точка є точкою максимуму функції (рис.3), а точка  **–** є точкою мінімуму.

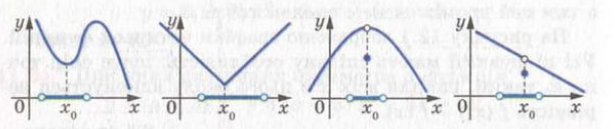


***Рис. 3***

* **Точку називають точкою максимуму функції *у* = *f(x),* якщо для всіх *х* з деякого околу точки справджується нерівність *f() f(х).* Значення функції в точці максимуму називають максимумом функції.**

Точки максимуму будемо позначати через **,** а максимуми функції через або **.** Отже, у прикладі 1 **=-2,** а

Повертаючись до рисунка 1 бачимо, що існує деякий окіл точки 1, що для всіх точок із цього околу функція *у* = *f(x)*  набуває найменшого значення саме в точці 1. Таку точку називають ***точкою мінімуму функції,*** а значення функції в цій точці – ***мінімумом функції.***



***Рис. 4***

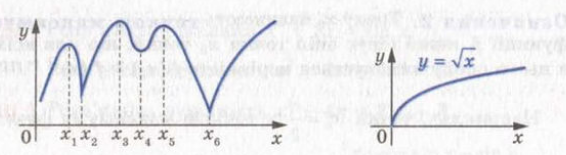
На рисунку 4 зображено графіки функцій, для яких є точкою мінімуму.

* **Точку називають точкою мінімуму функції *у* = *f(x),* якщо для всіх *х* з деякого околу точки справджується нерівність *f() f(х).* Значення функції в точці мінімуму називають мінімумом функції.**

Через позначають точки мінімуму, а через або  **–** мінімуми функції. У прикладі 1 **=1,** а **.**

Точки максимуму і мінімуму разом називають ***точками екстремуму функції*** (від лат. *Exctremum –* *крайній*), а значення функції в цих точках – *екстремумами функції.*

Оскільки в точці максимуму (мінімуму) функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями цієї функції в точках деякого околу, то точки максимуму (мінімуму) називають ще ***локальнимим екстремумами.***



***Рис. 5 Рис. 6***

На рисунку 5 точки є точками екстремуму. З означень випливає, що точки екстремуму є ***внутрішніми точками*** області визначення функції. Тому, наприклад, точка не є точкою мінімуму функції(рис. 6).

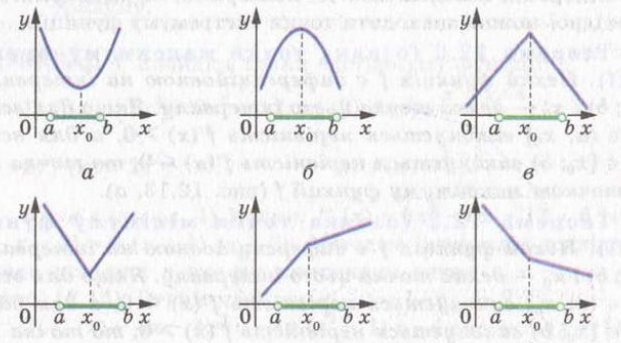
**Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками.**

Кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму. Іншими словами, точки екстремуму слід шукати серед критичних точок. Цей факт проілюстровано на рисунку 7.



***Рис. 7***

На рисунку 8 зображено графіки функцій, для яких **є критичною точкою.** На рисунках 8 критична точка є точкою екстремуму, на рисунках 8 ***д, е*** критична точка не є точкою екстремуму.



***г д е***

***Рис. 8***

Наявність екстремуму функції в точці пов’язана з поведінкою функції в околі цієї функції. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках ***8 а-г, маємо :*** функція зростає(спадає) на проміжку (а; **і** спадає (зростає) на проміжку *[;****.***

Функції, графіки яких зображено на рисунках 8 ***д, е*** такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків (а; **і** [*;****,*** друга – спадає на цих проміжках.

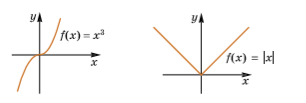
1. **Необхідна умова екстремуму функції.**

Точками екстремуму можуть бути лише критичні точки функції. **Критичні точки** – це **точки** в яких похідна **функції** рівна нулю, або не існує. Якщо похідна рівна 0 то **функція** в цій точці приймає локальний мінімум або максимум.

* ***Теорема Ферма (***на честь французького математика П’єра Ферма, необхідна умова екстремуму).

**Якщо точка є точкою екстремуму функції *f(x)* і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю:**

Умова : необов’язково означає, що – точка екстремуму функції.



***Рис. 9 Рис.10***

**Приклад 1:** Зокрема для функції (рис.2) і  **,** але **= 0 –** не є точкою екстремуму.

**Приклад 2:** Розглянемо функцію **:** (рис.3), для якої **= 0 –** точка мінімуму. З’ясуємо, чи має функція похідну в точці**.**

Знайдемо  **:**

Отже, при не існує, а тому не існує і похідної функції

у точці 0.

Отже, з **теореми Ферма та прикладу 2** дійдемо висновку:

* **Точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки.**

Тому, знаходячи точки екстремуму функції, у першу чергу знаходять її критичні точки. При цьому треба пам’ятати, що не кожна критична точка є точкою екстремуму (приклад 2).

1. **Достатня умова екстремуму функції.**

З’ясувати, чи є критична точка точкою екстремуму, можна за допомогою теореми – достатньої умови екстремуму.

***Теорема:*** (достатня умова екстремуму)

**Якщо функція неперервна в точці та:**

1. **на проміжку ( і на проміжку (, то є точкою максимуму функції;**
2. **на проміжку ( і на проміжку (, то є точкою мінімуму функції.**

Доведення: 1) Функція неперервна в точці і на проміжку **(**, тому функція зростає на **(** і

для всіх  **є (.**

На проміжку **[** функціяспадає (доведення аналогічне), тому для всіх  **є (.**

Отже, для всі ***х*** з проміжку **(,** тому  **–** точка максимумуфункції **.**

1. Доведення аналогічне до пункту 1.

В точках екстремуму відбувається зміна монотонності функції. Адже те, що похідна функції при переході через точку змінює знак з « - » на « + », означає, що спадання функції змінюється на зростання. Отже, точка мінімуму – це абсциса такої точки на графіку функції , у якій спадання функції змінюється на зростання. Той факт, що похідна функції при переході через точку змінює знак з « + » на « - », означає, що зростання функції змінюється на спадання. Отже, точка максимуму – це абсциса такої точки на графіку функції, у якій зростання функції змінюється на спадання.

**Висновки:**

**Якщо в точці похідна змінює знак з « + » на « - » (рухаючись у напрямі зростання *x ),* то – точка максимуму** (рис.11), **а якщо з « - » на « + », то – точка мінімуму** (рис.12).

А якщо зміни знаків не відбулося, (рис.13 і рис.14) то  **–** не є точкою екстремуму.



***Рис.11 Рис.12 Рис.13 Рис.14***

Таким чином, проміжки зростання, спадання та екстремуми функції пов’язані між собою. Тому для *знаходження екстремумів функції* можна застосувати такий алгоритм:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну функції
3. Знайти критичні точки функції
4. Позначити знайдені критичні точки на області визначення функції та знайти знак похідної на кожному з отриманих проміжків.
5. Для кожної критичної точки за знаком похідної на проміжках зліва і справа від неї визначити, чи є вона точкою екстремуму, і якою саме, максимуму чи мінімуму. Записати результат.
6. **Задачі на пошук точок екстремуму та екстремумів функцій.**

**Задача1.**

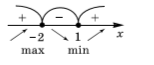
Знайти точки екстремуму функції:

**Розв’язання:** скористаємося вище згаданим алгоритмом.

1. *D(y)=R*
2. , маємо рівняння: , звідки

– критичні точки

1. Позначимо критичні точки на *D(y)*(числовій осі) і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків:



***Рис.15***

на (-2; 1);

Результат зображено на рисунку 15.

1. Отже,

**Відповідь:**

**Задача 2.**

Знайти екстремуми функції:

**Розв’язання:**

1. *D(y)=*(-
2. =0 , тобто ;

критичні точки

Позначимо критичні точки на області визначення функції та з’ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків. (рис.16)



***Рис.16***

5)Отже, **–** точки екстремуму.

Тоді , **;**

**Відповідь: ;**

Запитання для самоконтролю:

1.Що називають околом точки **?**

2.Яку точку називають точкою максимуму функції, а яку – точкою мінімуму?

3.Що називають максимумом функції, а що мінімумом?

4.Які точки називають точками екстремуму, що називають екстремумом функції?

5.Сформулюйте теорему Ферма (необхідну умову екстремуму)

6.Сформулюйте алгоритм дослідження функції на точки екстремуму та екстремуми?

Домашнє завдання:

